Programme de colle - Semaine n° 15: du 27/01/2025 au 31/01/2025

Connaissances minimales attendues

Chapitre 9 - Couples de variables aléatoires discrètes

Se reporter à un programme de colle précédent.

Chapitre 10 - Variables aléatoires. Variables aléatoires à densité

- Variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$;
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire X, notation F_X. Fonction d'antirépartition / fonction queue de répartition / fonction de survie de X ;
- Propriétés fondamentales vérifiées par la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X :
  * F_X est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$;
  * F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
  * Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, F_X admet une limite finie à droite et à gauche en x_0 ;
  * Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, F_X est continue à droite en x_0 ;
  * $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$;
  * Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$;
  * Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{x_0^-} F_X$.
- Caractérisation des fonctions de répartition ;
- Caractérisation de la continuité en un point de F_X :
  Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, F_X est continue en x_0 si et seulement si $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$;
- **(HP)** Variable aléatoire (de loi) diffuse ;
- La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète X est « constante par morceaux » : plus précisément, si X est discrète, F_X est constante sur tout intervalle d'intervalle d'intersection vide avec $X(\Omega)$;
- Variable aléatoire à densité : définition ;
- Exemple de fonction de répartition d'une variable aléatoire ni discrète ni à densité ;
- Indépendance de deux variables aléatoires, d'une famille finie de variables aléatoires, d'une suite de variables aléatoires (cas général) ;
- **(HP)** Fonction de répartition de $\min(X_1, \dots, X_n)$ et de $\max(X_1, \dots, X_n)$ où X_1, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes ;
- Lemme des coalitions (cas général) ;
- Linéarité de l'espérance (cas général) ;
- Espérance d'un produit de n variables aléatoires indépendantes (cas général) ;

- Croissance de l'espérance (cas général) ;
- Variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes (cas général) ;
- Variance d'une transformée affine (cas général) ;
- Variable aléatoire centrée, centrer une variable aléatoire ;
- Variable aléatoire réduite ;
- Variable aléatoire centrée réduite, centrer et réduire une variable aléatoire admet une espérance et une variance non nulle ;
- Variable aléatoire à densité ;
- Caractérisation des fonctions de répartition des variables aléatoires à densité ;
- Définition d'une densité f_X d'une variable aléatoire à densité ;
- Toute variable aléatoire à densité admet une densité ;
- Déterminer une densité f_X à partir de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire à densité X ;
- Déterminer la fonction de répartition F_X à partir d'une densité f_X d'une variable aléatoire à densité X : formule $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- Caractérisation des fonctions densité de probabilité ;
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X est de classe $\mathcal{C}^1$ là où une densité f_X est continue ;
- Les variables aléatoires à densité sont (de loi) diffuse(s) ;
- Expression intégrale des probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant x)$, $\mathbb{P}(X < x)$, $\mathbb{P}(X \geqslant x)$, $\mathbb{P}(X > x)$, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b)$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, $\mathbb{P}(a < X < b)$, $\mathbb{P}(a \leqslant X < b)$;
- Espérance d'une variable aléatoire à densité ;
- Transformée affine Y d'une variable aléatoire à densité X : il s'agit d'une variable aléatoire à densité, dont on peut expliciter la fonction de répartition F_Y à partir de F_X, et une densité f_Y à partir d'une densité f_X de X.
- Étude de quelques transformées classiques d'une variable aléatoire à densité X, sur des exemples : X^2, e^X, $|X|$, ...
- Théorème de transfert dans le contexte des variables aléatoires à densité ;
- Moments d'une variable aléatoire à densité ;
- **(HP)** Si X est une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre $r+1$, alors X admet un moment d'ordre r ;
- **(HP)** Une variable aléatoire (presque-sûrement) bornée admet des moments de tout ordre.
- Variance d'une variable aléatoire à densité ;
- Formule de Koenig-Huygens dans le contexte des variables aléatoires à densité ;

- Écart-type d'une variable aléatoire à densité ;

- Lois uniformes à densité : notation $\mathcal{U}([a, b])$; densité standard ; fonction de répartition ; espérance ; variance ; cas particulier de la loi $\mathcal{U}([0, 1])$; si X suit la loi $\mathcal{U}([0, 1])$ alors $a + (b - a)X$ suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ (et réciproquement) ;

- Lois exponentielles : notation $\mathcal{E}(\lambda)$, densité standard ; fonction de répartition ; espérance ; variance ; **(HP)** existence et valeur du moment d'ordre n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) ; si X suit la loi exponentielle de paramètre 1, $\dfrac{1}{\lambda}X$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (et réciproquement), si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, les variables aléatoires suivant une loi exponentielle se caractérisent par leur absence de mémoire ; **(HP)** si X suit une loi exponentielle, $\lfloor X \rfloor + 1$ suit une loi géométrique ;

- Lois normales : loi normale centrée réduite, lois normales (cas général), notation $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, densité standard (notée φ pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, notée φ_{m,σ^2} dans le cas général), fonction de répartition (notée Φ pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, notée Φ_{m,σ^2} dans le cas général), table des valeurs de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, propriétés vérifiées par Φ (caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, stricte croissance sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$ (où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$), la variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, toute transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit une loi normale, espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, **(HP)** existence et valeur du moment d'ordre n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), stabilité de la loi normale par transformée affine, stabilité de la loi normale par la somme (sous hypothèse d'indépendance)

- Utilisation des intégrandes de type $f(t)$, $tf(t)$ ou $t^2 f(t)$ où f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi à densité usuelle afin de déterminer la nature et la valeur d'intégrales impropres convergentes.

- Étude de transformées $g(X, Y)$ de couples « hybrides » (X, Y) où X est une variable aléatoire discrète et Y est une variable aléatoire à densité, en calculant la fonction de répartition en tout point à l'aide de la formule des probabilités totales.

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- Les Savoir-Faire du programme de colle précédent sont toujours valables ;
- Expliciter la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète ;
- Montrer qu'une variable aléatoire X dont on connaît la fonction de répartition F_X est à densité/ n'est pas à densité ;
- Montrer qu'une fonction de la variable réelle à valeurs réelles est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ;
- Montrer qu'une fonction de la variable réelle à valeurs réelles est une densité de probabilité ;
- Calculer une densité d'une variable aléatoire à densité à partir de sa fonction de répartition ;
- Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité à partir d'une densité ;
- Calculer des probabilités mettant en jeu une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition ou une densité est connue ;
- Montrer qu'une variable aléatoire à densité admet/n'admet pas d'espérance ;
- Montrer qu'une variable aléatoire à densité admet/n'admet pas de variance ;
- Montrer qu'une variable aléatoire à densité admet/n'admet pas de moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$;
- Si X est une variable aléatoire à densité, montrer (dans des cas particuliers) que $aX+b$, X^2, $\sqrt{X}$, e^X, $\ln(X)$, $|X|$ sont des variables aléatoires à densité dont on donnera une densité. Reconnaître éventuellement une loi usuelle ;
- Si X est une variable aléatoire à densité, déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$;
- Si $(X_1, ...X_n)$ sont n variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes de même loi, montrer que $\min(X_1, ..., X_n)$ et $\max(X_1, ..., X_n)$ sont deux variables aléatoires à densité dont on déterminera une densité ;
- Calculer (sous réserve d'existence) l'espérance d'une transformée d'une variable aléatoire à densité par le biais du théorème de transfert ;
- Utiliser judicieusement les formules du cours (densité, fonction de répartition, espérance et variance) des variables aléatoires à densité suivant une loi usuelle

« Et plus si affinités ... »

- Montrer des résultats théoriques généraux utilisant les notions du chapitre 9 et 10 ;
- Manipuler la convergence d'une série double d'une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^2$;
- Étude non guidée de couples de variables aléatoires discrètes dépendant d'un ou de plusieurs paramètres réels ;
- Étude non guidée de transformées de couples de variables aléatoires discrètes ;
- Étude non guidée de transformées sophistiquées de variables aléatoires à densité ;
- Étude non guidée de transformées de couples « hybrides », ie de variables aléatoires de la forme $f(X, Y)$ avec X discrète et Y à densité

Preuves exigibles

Propositions

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé possédant chacune un moment d'ordre 2, alors le couple (X, Y) admet une covariance (preuve avec le théorème d'existence de l'espérance par domination (admis)) **[C]** ;

2. Formule de Koenig-Huygens pour la covariance **[A]** ;

3. Si X et Y admettent une variance, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$ **[C]**.
   Si X et Y sont de surcroît indépendantes, nous avons : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ **[C]** ;

4. Variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes **[C]** ;

5. **(HP)** Variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes (cas général) **[A]** ;

6. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance et cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance **[A]**.

7. Toute fonction de répartition est à valeurs dans $[0, 1]$ et croissante sur $\mathbb{R}$ **[A]** ;

8. Une fonction de répartition admet 1 comme limite en $+\infty$ (en admettant les théorèmes de limite monotone **(HP)**) **[A]** ;

9. **(HP)** Fonction de répartition de $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et de $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$ si X_1, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes (en fonction de la fonction de répartition de X_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$) **[C]** ;

10. Transformée affine d'une variable aléatoire à densité (cas général) **[A]** ;

11. **(HP)** Une v.a. à densité admettant un moment d'ordre $r+1$ admet un moment d'ordre r **[A]** ;

12. Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([a, b])$ **[A]** ;

13. Transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme **[A]** ;

14. Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ **[A]** ;

15. Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([a, b])$ **[A]** ;

16. Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ **[A]** ;

17. **(HP)** Moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ **[A]** ;

18. **(HP)** Si U suit la loi $\mathcal{U}([0, 1[)$, alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Simulation de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ par la méthode dite d'inversion [1] **[A]** ;

19. **(HP)** Si X suit une loi exponentielle, $\lfloor X \rfloor + 1$ suit une loi géométrique **[C]** ;

20. Une variable aléatoire de loi exponentielle est sans mémoire, et toute variable aléatoire à densité sans mémoire suit (sous des hypothèses complémentaires) une loi exponentielle **[A]** ;

1. pas encore abordée dans le cas général en TP Python

Exemples/ exercices

1. On effectue $N \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise dans une urne comportant, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $n_i \in \mathbb{N}^*$ boules portant le numéro i.
   On note, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro i obtenues.
   Alors, (X_1, X_2) possède une covariance et $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -\dfrac{Nn_1n_2}{(n_1+n_2+n_3)^2}$. Interprétation du signe de la covariance obtenue **[C]**.

2. Si deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli ne sont pas corrélées, alors elles sont indépendantes **[TD]**.

3. Loi de $X+Y$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ $(n \geqslant 3)$ **[TD]**.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires (non nécessairement indépendantes) suivant toutes une loi de Bernoulli (pas nécessairement de même paramètre).
   Alors, $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et $V(Y_n) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ **[TD]**.

5. Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$: détermination et tracé **[C]** ;

6. Une variable aléatoire discrète n'est pas à densité **[C]** ;

7. Si X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2/4 & \text{si } x \in [0,2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   Alors :

   * X est à densité. Détermination d'une densité de X **[C]**.
   * $Y = 3X-2$ est à densité. Détermination d'une densité de Y. **[C]**
   * $Z = X^2$ est à densité. Détermination d'une densité de Z. **[C]**
   * $T = e^X$ est à densité. Détermination d'une densité de T.**[C]**

8. Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{3}{t^4} \text{ si } t \geqslant 1 \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

   est une densité.
   Alors, X possède une variance de valeur $\dfrac{3}{4}$. (On pourra demander de montrer que f est bien une densité de probabilité) **[C]** ;

9. Existence et valeur de l'espérance $\dfrac{1}{1+\exp(-X)}$ où X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$ **[C]** ;

10. Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X^3 possède une espérance de valeur 0 **[C]**.

11. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$, alors $|X| \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ **[C]** ;

12. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(1)$, alors $\min(X_1, \ldots, X_n)$ suit la loi $\mathcal{E}(n)$ **[C]** ;

13. Si X et Y sont indépendantes et suivent respectivement la loi $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$ et $\mathcal{U}([0, 1])$, alors XY suit la loi $\mathcal{U}([-1, 1])$ **[C]** ;

[A] : Annexe **Preuves** ;
[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;
[Ac] : Annexe **Corrections**
[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels)** et **TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri **(HP)** (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson **(HP)**, méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment**(HP)**, application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ **(HP)**].
- **TP4 - Graphes (rappels)** [révision du vocabulaire et des théorèmes du programme, représentation d'un graphe avec Python (matrice numpy d'adjacence, liste des listes d'adjacence, dictionnaire), fonctions de conversion d'une représentation à une autre, divers exercices de manipulation de graphes (ordre, nombre d'arêtes, caractère adjacent de deux sommets, voisinage, degré, caractère isolé d'un sommet, caractère simple, complet, eulérien d'un graphe, calcul du nombre de chaînes reliant deux sommets donnés, calcul des distances combinatoires à un sommet dans un graphe simple, calcul de l'excentricité, du diamètre d'un graphe, algorithme de Dijkstra (calcul d'une chaîne de poids minimal)].
- **TP5 - Simulation d'expériences aléatoires - le cas discret (rappels et compléments)** [diagramme en bâtons (`bar`), la fonction `unique` (**(HP)**, à savoir donc implémenter à la main), matrices de booléens (pour compter le nombre de coefficients d'un tableau `numpy` vérifiant une contrainte donnée), les fonctions `random`, `randint`, `binomial`, `geometric`, `poisson` de la sous-bibliothèque `random` de la bibliothèque `numpy`, méthode de Monte-Carlo (estimation d'une espérance (moments, espérance de transformées), d'une probabilité, ...), divers exercices (tirages avec remise, sans remise, selon un protocole plus « exotique », marches aléatoires, graphes aléatoires d'Erdös-Renyi (estimation du nombre d'arêtes, du nombre de sommets isolés, de la probabilité qu'il soit connexe, etc))]
- **TP6 - Bases de données et langage SQL** [entité, table, base de données, attribut, descripteur, domaine, type, enregistrement, champ, schéma de table, schéma relationnel d'une base de données, clé primaire, clé étrangère, requête SQL de création de table (`CREATE TABLE ...`) (avec éventuellement déclaration des clés primaires et étrangères (`PRIMARY KEY(...)`, `FOREIGN KEY(...) REFERENCES ...`), insertion des données dans une table (`INSERT INTO ... VALUES`), suppression des données dans une table (`DELETE FROM ...`, `DELETE FROM ... WHERE`), suppression d'une table (`DROP TABLE ...`) **(HP)**, modification des données d'une table (`UPDATE ... SET ... WHERE ...`), projection sans contrainte (`SELECT ... FROM ...`), projection sans doublon (`SELECT DISTINCT ... FROM ...`), projection avec données triées dans l'ordre croissant/décroissant (`SELECT ... FROM ... ORDER BY ... ASC/DESC`), projection avec données tronquées (`SELECT ... FROM ... LIMIT ... OFFSET ...`), projection avec renommage (`AS`), restriction (projection avec contrainte) (`SELECT ... FROM ... WHERE ...`), produit cartésien de deux tables, jointure de deux tables (`SELECT ... FROM ... INNER JOIN ... ON ... = ....`), opérateurs ensemblistes (`UNION`, `INTERSECT`, `EXCEPT`), fonction d'agrégation (`COUNT(...)`, `SUM(...)`, `AVG(...)`, `MIN(...)` et `MAX(...)`), utilisation des fonctions d'agrégation sur des « groupes » (`GROUP BY .... HAVING ...`) (**(HP)**)]

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).
On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- Les variables aléatoires à densité doivent occuper une place centrale dans les colles de cette semaine ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.